CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI"
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H1 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=a+b\sqrt{2}, a,b\in\mathbb{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$.

2p **a)** Arătați că $x\in A$, unde $x=3+2\sqrt{2}$.

3p **b)** Arătați că $(\forall)x,y\in A \Rightarrow x\cdot y\in A$.

2p **c)** Demonstrați că A conține o infinitate de elemente distincte.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $x=3+2\sqrt{2}$, atunci $a=3\in\mathbb{Z}, b=2\in\mathbb{Z}$ și $a^2-2b^2=3^2-2\cdot 2^2=1$, deci $x\in A$	**1p** **1p**
b) Fie $x,y\in A \Rightarrow x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2},\ a^2-2b^2=1,\ c^2-2d^2=1;\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ $xy=\underbrace{ac+2bd}_{m\in\mathbb{Z}}+\underbrace{(bc+ad)}_{n\in\mathbb{Z}}\sqrt{2}$, iar $m^2-2n^2=a^2c^2+4abcd+4b^2d^2-2b^2c^2-4abcd-2a^2d^2=$ $=a^2\underbrace{\left(c^2-2d^2\right)}_{1}-2b^2\underbrace{\left(c^2-2d^2\right)}_{1}=a^2-2b^2=1$, deci $xy\in A$.	**1p** **1p** **1p**
c) Conform a) $x=3+2\sqrt{2}\in A$ și $x>1$ Conform b) $x^n\in A, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$ și deoarece $x>1$, avem $x^n>x^{n-1}>...>x^2>x$, adică puterile lui x se află în A și sunt distincte două câte două, formând un șir strict crescător. Deci A conține o infinitate de elemente.	**1p** **1p**

Enunț subiect 2:

Pentru a măsura magnitudinea unui cutremur, Charles Richter a conceput formula $\lg E=11{,}8+1{,}5M$, unde E reprezintă cantitatea de energie eliberată în momentul producerii cutremurului, iar M este magnitudinea acestuia.

3p **a)** Ce magnitudine ar trebui să aibă un cutremur dacă în timpul producerii lui s-ar elibera o cantitate de energie de 10^{19}?

4p **b)** Arătați că, dacă se mărește magnitudinea cutremurului cu o unitate, cantitatea de energie eliberată crește de cel puțin 31 de ori.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $E=10^{19}\Rightarrow \lg\left(10^{19}\right)=11{,}8+1{,}5M \Rightarrow 19=11{,}8+1{,}5M \Rightarrow$ $1{,}5M=7{,}2\Rightarrow M=4{,}8$	**2p** **1p**
b) Pentru cutremurul cu magnitudinea M se notează cantitatea de energie cu E_1, iar pentru cel cu magnitudinea $M+1$, cantitatea de energie se notează cu $E_2 \Rightarrow$ $\lg E_1=11{,}8+1{,}5M$ și $\lg E_2=11{,}8+1{,}5(M+1)$ $E_1=10^{11{,}8+1{,}5M}$ și $E_2=10^{11{,}8+1{,}5M+1{,}5}$	**2p** **1p**

$\dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{10^{11,8+1,5M+1,5}}{10^{11,8+1,5M}}=10\sqrt{10}>31\Rightarrow E_2>31E_1$	**2p**

Enunț subiect 3:

Fie ε una dintre soluțiile ecuației $x^2+x+1=0$.

3p **a)** Demonstrați că ε este soluție și a ecuației $x^4+x^2+1=0$.

4p **b)** Arătați că $a=\dfrac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}+\dfrac{\varepsilon^5+\varepsilon^{10}}{(\varepsilon^2+\varepsilon)^2}-\dfrac{\varepsilon^{2025}-1}{\varepsilon^2}$ este un număr real.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\Rightarrow\varepsilon^3-1=0\Rightarrow\varepsilon^3=1$	**1p**
$\varepsilon^4+\varepsilon^2+1=\varepsilon^3\cdot\varepsilon+\varepsilon^2+1=\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\Leftrightarrow\varepsilon$ este soluţie a ecuaţiei $x^4+x^2+1=0$	**2p**
b) $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\Leftrightarrow 1+\varepsilon=-\varepsilon^2$ și $1+\varepsilon^2=-\varepsilon$ $(1-\varepsilon)^4=(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)^2=(-3\varepsilon)^2=9\varepsilon^2$, deci $\dfrac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}=-\dfrac{1}{9}$	**1p**
$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\Leftrightarrow\varepsilon^2+\varepsilon=-1$ $\varepsilon^5+\varepsilon^{10}=\varepsilon^3\cdot\varepsilon^2+(\varepsilon^3)^3\cdot\varepsilon=\varepsilon^2+\varepsilon$, deci $\dfrac{\varepsilon^5+\varepsilon^{10}}{(\varepsilon^2+\varepsilon)^2}=-1$	**1p**
$\varepsilon^3=1\Rightarrow\varepsilon^{2025}=(\varepsilon^3)^{675}=1\Rightarrow\varepsilon^{2025}-1=0$, deci $\dfrac{\varepsilon^{2025}-1}{\varepsilon^2}=0$	**1p**
$a=\dfrac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}+\dfrac{\varepsilon^5+\varepsilon^{10}}{(\varepsilon^2+\varepsilon)^2}-\dfrac{\varepsilon^{2025}-1}{\varepsilon^2}=-\dfrac{1}{9}-1-0=-\dfrac{10}{9}\in\mathbb{R}$	**1p**

Enunț subiect 4:

Fie funcția $f:[1,3]\to[2,6],\ f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Determinați perechile de numere (a,b) astfel încât funcția f să fie bijectivă.

3p **b)** Pentru $a=2$ și $b=0$ determinați inversa funcției bijective $g:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $g(x)=\dfrac{f(x)+3}{f(x)-1}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$ funcția f este strict monotonă, deci injectivă	**1p**
f este surjectivă $\Leftrightarrow f([1;3])=[2;6]$	**1p**
Dacă $a>0\Rightarrow f(1)=2$ și $f(3)=6\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\3a+b=6\end{cases}\Leftrightarrow(a,b)=(2,0)$	**1p**
Dacă $a<0\Rightarrow f(1)=6$ și $f(3)=2\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\3a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow(a,b)=(-2,8)$	**1p**
b) $a=2$ și $b=0\Rightarrow f(x)=2x\Rightarrow g(x)=\dfrac{2x+3}{2x-1}$	**1p**
$g(x)=y\Leftrightarrow x=\dfrac{y+3}{2(y-1)}$ și $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ pentru orice $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$	**1p**
$g^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\},g^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2(x-1)}$	**1p**