CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H1 – Filiera tehnologică – toate profilurile

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

3p **a)** Determinați numerele $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det\left(B\cdot A(a)\cdot B^{-1}\right)=\det\left(A\left(a^3\right)\right)$.

4p **b)** Dacă $C=B\cdot A(3)\cdot B^{-1}$, arătați că suma elementelor matricei C^{20} este un număr natural par.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	1p
$B\cdot A(a)\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}a & 2-a\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\det\left(B\cdot A(a)\cdot B^{-1}\right)=2a$, $\det\left(A\left(a^3\right)\right)=2a^3$	1p
$2a=2a^3\Rightarrow a\in\{-1;0;1\}$	1p
b) Din asociativitatea înmulțirii matricelor obținem: $C^2=\left(BAB^{-1}\right)\left(BAB^{-1}\right)=BA\left(B^{-1}B\right)AB^{-1}=BA^2B^{-1}$ Analog $C^{20}=BA^{20}B^{-1}$	2p
$A^{20}=\begin{pmatrix}2^{20} & 0\\ 0 & 3^{20}\end{pmatrix}$ și $C^{20}=\begin{pmatrix}3^{20} & 2^{20}-3^{20}\\ 0 & 2^{20}\end{pmatrix}$	1p
Suma elementelor lui C^{20} este egală cu 2^{21} care este număr natural par.	1p

Enunț subiect 2:

Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -4 & x\\ 4 & 16 & x^2\end{vmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $D\left(2^x\right)=0$.

3p **b)** Determinați numărul real x pentru care $D(x)$ are valoare maximă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $D(x)=6(x+4)(2-x)\Rightarrow D\left(2^x\right)=6\left(2^x+4\right)\left(2-2^x\right)$	2p
$D\left(2^x\right)=0\Rightarrow\left(2^x+4\right)\left(2-2^x\right)=0\Rightarrow x=1$	2p
b) $D(x)=-6x^2-12x+48$	1p
Funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-6x^2-12x+48$ asociată determinantului are valoare maximă pentru $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{12}{2\cdot 6}=-1$	2p

Enunț subiect 3:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x^2-3ax}, x<1\\ \dfrac{x^2-a}{3x}+1, x\geq 1\end{cases}$, unde a este un număr real.

3p **a)** Determinați numerele reale a pentru care funcția are limită în $x_0=1$.

4p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f și arătați că această dreaptă este paralelă cu dreapta de ecuație $x-3y+2025=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\sqrt{4x^2-3ax}=\sqrt{4-3a}$	**1p**
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\dfrac{x^2-a}{3x}+1\right)=\dfrac{4-a}{3}$	**1p**
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)\Leftrightarrow\sqrt{4-3a}=\dfrac{4-a}{3}\Leftrightarrow a^2+19a-20=0$ cu soluțiile $a_1=-20$ și $a_2=1$, care convin	**1p**
b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-a}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{3}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-a}{3x}+1-\dfrac{x}{3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-a}{3x}=1$	**2p**
Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=\dfrac{x}{3}+1$	**1p**
Asimptota și dreapta de ecuație $x-3y+2025=0$ au pantele egale cu $\dfrac{1}{3}$, deci sunt paralele	**1p**

Enunț subiect 4:

Se consideră limitele $l_k=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(x^2+x(k-1)-k\right)}{x-1}$ și $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{N}^*$.

3p **a)** Arătați că $l_1<L$.

4p **b)** Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $l_1+l_2+...+l_n=209$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $l_1=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x-1}=1\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=1\cdot2=2$	**1p**
$L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$	**1p**
$L>l_1\Leftrightarrow2\sqrt{2}>2\Leftrightarrow8>4$, ceea ce este adevărat.	**1p**
b) (4p) $l_k=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(x^2+x(k-1)-k\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left[(x-1)(x+k)\right]}{x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left[(x-1)(x+k)\right]}{(x-1)(x+k)}\cdot(x+k)=k+1$	**2p**
$l_1+l_2+...+l_n=209\Rightarrow1+2+...+(n+1)=210\Rightarrow(n+1)(n+2)=420\Rightarrow n=19$	**2p**