CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 2a^2-2a & 4a & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$.

3p **a)** Calculați $\det\left[\left(A(2025)\right)^{2025}\right]$.

4p **b)** Determinați $n\in\mathbb{N}, n\geq 8$ pentru care are loc egalitatea

$$A\left(\lg\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\right)\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\right)\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)=A\left(\lg\left(\frac{5}{5n-36}\right)\right).$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\det\left(A(2025)\right)=1$	**1p**
$\det\left[\left(A(2025)\right)^{2025}\right]=\left[\det\left(A(2025)\right)\right]^{2025}=1^{2025}=1$	**2p**
b) $A(a)\cdot A(b)=A(a+b),(\forall)a,b\in\mathbb{R}$	**1p**
$A\left(\lg\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\right)\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)=$ $=A\left(\lg\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\lg\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)=A\left(\lg\left(\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}\right)\right)=$ $=A\left(\lg\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}\right)\right)=A\left(\lg\left(\frac{n+1}{2n}\right)\right)$	**2p**
$A\left(\lg\left(\frac{n+1}{2n}\right)\right)=A\left(\lg\left(\frac{5}{5n-36}\right)\right)\Leftrightarrow\lg\left(\frac{n+1}{2n}\right)=\lg\left(\frac{5}{5n-36}\right)\Leftrightarrow\frac{n+1}{2n}=\frac{5}{5n-36}$ cu soluțiile $n=9$ care convine și $n=-\frac{4}{5}$ care nu convine	**1p**

Enunț subiect 2:

Se consideră în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ matricele $A=\begin{pmatrix} 5 & 5+\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $B=A-\sqrt{5}\cdot I_2$ și $C=A-I_2$.

3p **a)** Calculați A^{2025}.

2p **b)** Calculați $\det\left(C^{-1}\right)$

2p **c)** Arătați că ecuația $X^{2n}=B$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, nu are soluții în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Folosim relația Hamilton - Cayley și, cum Tr$A = 6+\sqrt{5}$, det$A$=0, rezultă $A^{2} = (6+\sqrt{5})\cdot A$	**2p**
Demonstrăm prin inducție că $A^n = (6+\sqrt{5})^{n-1}\cdot A$, deci $A^{2025} = (6+\sqrt{5})^{2024}\cdot A$	**1 p**
b) $C\cdot C^{-1}=I_2 \Rightarrow \det\left(C\cdot C^{-1}\right)=1 \Rightarrow \det(C)\cdot\det\left(C^{-1}\right)=1$	**1p**
$\det(C)=-5-\sqrt{5} \Rightarrow \det\left(C^{-1}\right)=-\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$	**1p**
c) $X^{2n}=B \Rightarrow (\det X)^{2n}=\det B$, $B=\begin{pmatrix}5-\sqrt{5} & 5+\sqrt{5}\\ \sqrt{5} & 1\end{pmatrix}$, $\det B=-6\sqrt{5}$	**1p**
$X\in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \det X\in\mathbb{R} \Rightarrow (\det X)^{2n}\geq 0$ și, cum $(\det X)^{2n}=-6\sqrt{5}$, atunci ecuația $X^{2n}=B$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, nu are soluții în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$	**1p**

Enunț subiect 3:

7p Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2025^{\frac{1}{x}}-2025}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$D=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$	**1p**
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2024} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2024}$ ecuația asimptotei orizontale spre $\pm\infty$	**2p**
$l_s(0)=-\dfrac{1}{2025}$, $l_d(0)=0$, deci nu există asimptotă verticală în $x=0$	**2p**
$l_s(1)=+\infty$ și $l_s(1)=-\infty$, deci ecuația asimptotei verticale este $x=1$	**2p**

Enunț subiect 4:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^{ax+1}+1, & x\in(-\infty;-1] \\ 3+ax, & x\in(-1;+\infty)\end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Determinați $a\in\mathbb{N}$ pentru care funcția are limită în fiecare punct din domeniu său de definiție.

3p **b)** Demonstrați că, pentru $a=1$, ecuația $f(x)+f(-x)-7=0$ are o soluție în intervalul $(-\infty,-1)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ pentru orice $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**1p**
$(\exists)\lim\limits_{x\to-1} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow-1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow-1} f(x) \Leftrightarrow e^{1-a}+1=3-a \Leftrightarrow e^{1-a}+a-2=0$	**2p**
$a=0$ nu verifică ecuația; $a=1$ verifică ecuația, iar pentru $a\geq 2 \Rightarrow e^{1-a}+a-2>0$, deci $a=1$ este unica soluție	**1p**
b) $x\in(-\infty,-1) \Rightarrow f(x)=e^{x+1}+1$; $x\in(-\infty,-1) \Rightarrow -x\in(1,+\infty) \Rightarrow f(-x)=3-x$ și ecuația devine $e^{x+1}-x-3=0$	**1p**
Funcția $g(x)=e^{x+1}-x-3$, cu $x\in(-\infty,-1)$, este continuă, iar $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\nearrow-1} g(x)=-1$ sunt de semne contrare, deci există $x_0\in(-\infty,-1)$ cu $g(x_0)=0$	**2p**