CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H1 – Filiera tehnologică – toate profilurile

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Fie funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+x-1)\ln x$ şi $F(x)=x\left(\frac{x^3}{4}+ax-b\right)\ln x-x(cx^3+dx-1)$.

4p **a)** Determinaţi $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât F să fie o primitivă a lui f pe intervalul $(0,+\infty)$.

3p **b)** Determinaţi $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f astfel încât $G(e)=\frac{e^4}{16}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, atunci F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi $F'(x)=f(x),(\forall)x\in(0,+\infty)$	**1p**
$F'(x)=(x^3+2ax-b)\ln x+\left(\frac{1}{4}-4c\right)x^3+(a-2d)x-b+1,(\forall)x\in(0,+\infty)$	**1p**
Se obţine că $a=\frac{1}{2},b=1,c=\frac{1}{16},d=\frac{1}{4}$	**2p**
b) Fie $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R},G(x)=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-x\left(\frac{x^3}{16}+\frac{x}{4}-1\right)+k$ primitiva lui f cu proprietatea că $G(e)=\frac{e^4}{16}$	**1p**
$G(e)=\frac{3e^4}{16}+\frac{e^2}{4}+k$, deci $k=-\frac{e^2(e^2+2)}{8}$	**1p**
Primitiva căutată este $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R},G(x)=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-x\left(\frac{x^3}{16}+\frac{x}{4}-1\right)-\frac{e^2(e^2+2)}{8}$	**1p**

Enunț subiect 2:

Se consideră funcția continuă $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-4}, x\in[0,1)\\ -\frac{1}{3\sqrt{x}}, x\in[1,2]\end{cases}$.

3p **a)** Calculați $\int_0^2 f(x)\,dx$.

4p **b)** Determinați $k\in(0,\infty)$ astfel încât $\int_0^{\frac{k}{k+1}} f(\sqrt{x})\,dx=\ln\frac{7}{8}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) f continuă $\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx =$	**1p**
$= \int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx + \int_1^2 \left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\|\Big\|_0^1 - \left(\frac{2\sqrt{x}}{3}\right)\Big\|_1^2 = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$	**2p**
b) $k \in (0,\infty) \Rightarrow \frac{k}{k+1} \in (0;1)$; $x \in \left(0;\frac{k}{k+1}\right) \Rightarrow \sqrt{x} \in (0;1) \Rightarrow f(\sqrt{x}) = \frac{1}{x-4}$	**1p**
$\int_0^{\frac{k}{k+1}} f(\sqrt{x})dx = \int_0^{\frac{k}{k+1}} \frac{1}{x-4}dx = \ln\|x-4\|\Big\|_0^{\frac{k}{k+1}} = \ln\frac{3k+4}{4(k+1)}$	**2p**
$\ln\frac{3k+4}{4(k+1)} = \ln\frac{7}{8} \Rightarrow k = 1$	**1p**

Enunț subiect 3:

7p Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, $(\forall)x, y \in \mathbb{Z}$.
Determinați cardinalul mulțimii $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ simetrizabil în raport cu legea „}\circ\text{”}\}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Determinarea elementului neutru $e = 3$	**2p**
Calculul lui $x' = \frac{2x-3}{x-2}$ pentru $x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}$	**2p**
Condiția ca $x' = \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{Z}$	**1p**
Determinarea mulțimii $S = \{1;3\}$ și $card(S) = 2$	**2p**

Enunț subiect 4:

Se consideră mulțimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \|2x-1\| \le 5\}$ și operația algebrică $x * y = \max\{x, y\}$, $(\forall)x, y \in M$.

2p **a)** Dacă a este cel mai mic element al mulțimii M și b este cel mai mare element al acesteia, calculați $a * b$.

3p **b)** Determinați mulțimea $M_1 \cap M_2$, unde $M_1 = \{x \in M \mid 2 * x = x\}$ și $M_2 = \{x \in M \mid x * 2 = 2\}$.

2p **c)** Determinați perechile de numere (x, y), cu $x, y \in M$ care verifică sistemul $\begin{cases} x * 0 = y \\ y * 0 = x \end{cases}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $M = \{-2;-1;0;1;2;3\}$ $a = -2$, $b = 3$ și $a * b = \max(-2,3) = 3$	**1p** **1p**
b) $2 * x = x \Rightarrow x \in \{2;3\} = M_1$ $x * 2 = 2 \Rightarrow x \in \{-2;-1;0;1;2\} = M_2$ $M_1 \cap M_2 = \{2\}$	**1p** **1p** **1p**
c) Din cele două ecuații din sistem se obține $(x * 0) * 0 = x$ care este verificată de numerele $x \in \{0;1;2;3\}$, pentru care se obține $y \in \{0;1;2;3\}$ Soluțiile sistemului sunt $\{(0;0),(1;1),(2;2),(3;3)\}$	**2p**