CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoeretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Fie mulțimea $G=\left[\frac{k^2+1}{k},+\infty\right)$, cu $k\in(1,+\infty)$ și operația asociativă $x*y=kxy-k^2(x+y)+k^3+k$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Arătați că mulțimea G este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu operația dată.

4p **b)** Determinați numerele $x, k\in\mathbb{N}$, $x\geq 2$ și $k\geq 2$, știind că $\underbrace{x*x*\dots\dots*x}_{2025}=\frac{13^{2025}}{k}+k$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $x,y\in G\Rightarrow x,y\in\left[\frac{k^2+1}{k},+\infty\right)\Rightarrow x\text{-}k\geq\frac{1}{k}>0$ și $y\text{-}k\geq\frac{1}{k}>0$ deci $(x\text{-k})(y\text{-k})\geq\frac{1}{k^2}\Rightarrow$	**2p**
$k(x\text{-}k)(y\text{-}k)\geq\frac{1}{k}$ și deducem că $x*y\geq\frac{k^2+1}{k}$ deci $x*y\in G$	**1p**
b) Cum legea e asociativă, demonstrăm prin inducție că $\underbrace{x*x*\dots\dots*x}_{n}=k^{n-1}(x-k)^n+k$, pentru orice $n\in\mathbb{N},n\geq 2$	**2p**
Ecuația dată devine $[k(x-k)]^{2025}=13^{2025}$ deci $k(x\text{-}k)=13$. Cum $x, k\in\mathbb{N}$, $x\geq 2$ și $k\geq 2$, deducem că $k=13$ și $x=14$	**2p**

Enunț subiect 2:

Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)\,\middle|\,A(x)=\begin{pmatrix}x&0&1-x\\0&0&0\\1-x&0&x\end{pmatrix},x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

4p **a)** Demonstrați că $(G,\cdot)$ este grup .

3p **b)** Știind că $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},\circ\right)$ este un grup, unde $x\circ y=2xy-x-y+1,(\forall)x,y\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, arătați că acesta este izomorf cu grupul $(G,\cdot)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A(x)\cdot A(y)=A(2xy-x-y+1)=A\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right),(\forall)A(x),A(y)\in G$ și $\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$	**1p**
Justificarea asociativității	**1p**
Justificarea că $A(1)$ este element neutru	**1p**

Justificare orice element $A(x)\in G$ este simetrizabil, cu simetricul $A\left(\frac{1}{2(2x-1)}+\frac{1}{2}\right)\in G$	**1p**
b) Construcția funcției $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\to G, f(x)=A(x),(\forall)x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ Demonstrație f morfism Demonstrație f bijectivă	**1p** **1p** **1p**

Enunț subiect 3:

Se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{e^{2x}+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

3p **a)** Determinați primitiva funcției f_0 al cărei grafic conține punctul $A\left(0,\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2p **b)** Calculați $\int f_3(x)dx$.

2p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției f_1 are un singur punct de inflexiune.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\int\frac{1}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}+1}dx=-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right)+C$ $F(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right)+k$, $k\in\mathbb{R}$ $F(0)=-\frac{1}{2}\ln 2+k\Rightarrow k=0$ și $F(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right)$	**1p** **1p** **1p**
b) $\int f_3(x)dx=\int\frac{\left(e^x\right)^2}{\left(e^x\right)^2+1}\left(e^x\right)'dx=$ $=\int\left(1-\frac{1}{\left(e^x\right)^2+1}\right)\left(e^x\right)'dx=e^x-\operatorname{arctg}\left(e^x\right)+C$	**1p** **1p**
c) Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f_1, atunci F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f_1(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$ $F''(x)=\frac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ $F''(0)=0$, F continuă pe $\mathbb{R}$, F convexă pe $(-\infty,0]$ și concavă pe $[0,+\infty)$, deci $x=0$ este unicul punct de inflexiune	**1p** **1p**

Enunț subiect 4:

7p Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(t)=\int_1^t\left(x+\frac{4}{x}-5\right)dx$. Determinați valoarea minimă a funcției f.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f'(t)=\frac{t^2-5t+4}{t}$	**2p**
$f'(1)=0$ și $f'(4)=0$; f continuă și descrescătoare pe $[1;4]$ și crescătoare pe $[4,+\infty)$, deci $f(4)$ este valoarea minimă a funcției f	**3p**

$f(4)=\int_1^4\left(x+\frac{4}{x}-5\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+4\ln x-5x\right)\Big\|_1^4=4\ln 4-\frac{15}{2}$	**2p**