CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a IX-a
SECȚIUNEA H1 – Filiera tehnologică – toate profilurile

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

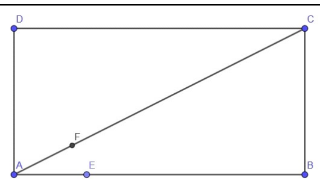
Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu proprietatea că $AB = 2AD$ și $AD = \sqrt{5}$. Pe latura AB se consideră punctul E astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AE}$, iar pe AC se consideră punctul F astfel ca $\overrightarrow{FC} = 4\overrightarrow{AF}$.

4p **a)** Determinați numărul real $a = \left|\overrightarrow{AF}\right| + \left|\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AE}\right|$.

3p **b)** Arătați că vectorii $\overrightarrow{DF}$ și $\overrightarrow{DE}$ sunt coliniari.

Detalii rezolvare	Barem asociat
 **a)** $\overrightarrow{FC} = 4\overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ $AC = 5$ și $\left\|\overrightarrow{AF}\right\| = 1$ $\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FA}$ și $\left\|\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AE}\right\| = \left\|\overrightarrow{FA}\right\| = \left\|\overrightarrow{AF}\right\| = 1 \Rightarrow$ $a = 2$	**1p** **1p** **2p**
b) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{-4\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}{4}$ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{-4\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}{5}$ $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{DF} \Rightarrow$ vectorii $\overrightarrow{DF}$ și $\overrightarrow{DE}$ sunt coliniari	**1p** **1p** **1p**

Enunț subiect 2:

Populaţia periferiei unui municipiu creşte cu 7% pe an, în timp ce populaţia rezidentă în centrul aceluiaşi municipiu scade cu 4% pe an. În luna ianuarie 2025, în fiecare din cele două zone, sunt câte 30000 de locuitori. Pentru n natural, se notează cu b_n şi respectiv cu c_n numărul de locuitori de la periferia şi respectiv din centrul municipiului din anul $2025+n$.

2p **a)** Calculaţi b_1 şi c_1 (numerele de locuitori din 2026).

2p **b)** Exprimaţi b_{n+1} în funcţie de b_n şi c_{n+1} în funcţie de c_n.

3p **c)** Exprimaţi în funcţie de n numerele de locuitori b_n şi c_n din anul 2025+n.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $b_1 = 30000\left(1 + \frac{7}{100}\right) = 32100$; $c_1 = 30000\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 28800$	**1p+1p**
b) $b_{n+1} = \left(1 + \frac{7}{100}\right)b_n = 1,07b_n$	**1p**

$c_{n+1}=\left(1-\frac{4}{100}\right)c_n=0,96c_n$	**1p**
c) $b_n=1,07^n\cdot 30000$, $c_n=0,96^n\cdot 30000$	**3p**

Enunț subiect 3:

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

3p **a)** $|x+2025|=|x-2025|$;

4p **b)** $|x-2|+|x^2-4|+|x^3-8|=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Cazul I: $x+2025=x-2025\Rightarrow x\in\varnothing$ Cazul II: $x+2025=2025-x\Rightarrow x=0$ Deci, soluţia ecuaţiei este $x=0$	**1p** **2p**
b) $|x-2|+|(x-2)(x+2)|+|(x-2)(x^2+2x+4)|=0$ $|x-2|\underbrace{\left(1+|x+2|+|x^2+2x+4|\right)}_{\geq 1,\forall x\in\mathbb{R}}=0$ Deci soluţia este $x=2$.	**1p** **2p** **1p**

Enunț subiect 4:

7p Demonstrați egalitatea următoare, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1+2(1+2)+3(1+2+3)+...+n(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Verificarea: $1=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{24}\Leftrightarrow 1=1$ Adevărat	**1p**
Scrierea identității pentru k și $k+1$	**1p**
Demonstrarea egalității $\frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{24}+(k+1)(1+2+...+(k+1))=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(3k+4)}{24}\Leftrightarrow$	**1p**
$\frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{24}+\frac{(k+1)^2(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(3k+4)}{24}\Leftrightarrow$	**2p**
$\frac{k(3k+1)}{24}+\frac{(k+1)}{2}=\frac{(k+3)(3k+4)}{24}\Leftrightarrow k(3k+1)+12(k+1)=(k+3)(3k+4)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3k^2+13k+12=3k^2+13k+12$ Adevărat	**2p**