CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a IX-a
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

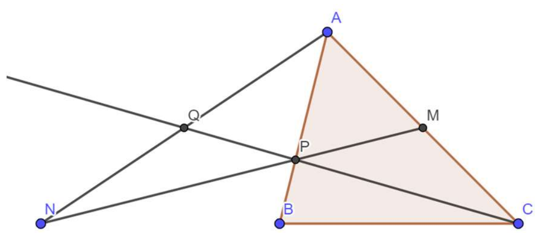
Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Fie $\triangle ABC$ și M mijlocul segmentului AC, N simetricul punctului C față de B și P un punct care verifică relația $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$

4p **a)** Arătați că punctele M, N și P sunt coliniare.

3p **b)** Dacă Q este punctul de intersecție al dreptelor CP și AN, determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{QM}=a\overrightarrow{CN}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
	
a) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CN}$	**2p**
$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CN}$	**1p**
$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow M,N,P$ coliniare	**1p**
b) M,N,P coliniare și M mijlocul segmentului $AC\Rightarrow NM$ mediană în $\triangle ANC$	**1p**
AB și NM mediane în $\triangle ANC$, iar $AB\cap NM=\{P\}\Rightarrow P$ centru de greutate al $\triangle ANC\Rightarrow CQ$ mediană în $\triangle ANC$	**1p**
QM linie mijlocie în $\triangle ANC\Rightarrow QM \parallel NC$ și $QM=\frac{1}{2}NC$ deci $\overrightarrow{QM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CN}$ și $a=-\frac{1}{2}$	**2p**

Enunț subiect 2:

3p **a)** Arătați că, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, are loc egalitatea $\left\{\frac{3x+7}{x+2}\right\}=\frac{1}{x+2}$.

4p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{3x+4}{x+1}\right]+\left\{\frac{3x+7}{x+2}\right\}=3,(27)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\left\{\frac{3x+7}{x+2}\right\}=\left\{3+\frac{1}{x+2}\right\}=\left\{\frac{1}{x+2}\right\}$	**2p**

$x\in(0,+\infty)\Rightarrow \frac{1}{x+2}\in(0;1)\Rightarrow \left\{\frac{1}{x+2}\right\}=\frac{1}{x+2}$	**1p**
b) $\left\{\frac{3x+7}{x+2}\right\}\in[0;1)$ $\Rightarrow \left[\frac{3x+4}{x+1}\right]\in(2,(27);3,(27)]$ și $\left[\frac{3x+4}{x+1}\right]\in\mathbb{Z}$ deci $\left[\frac{3x+4}{x+1}\right]=3$	**2p**
Conform a), ecuația devine $3+\frac{1}{x+2}=3,(27)$, cu soluția $x=\frac{5}{3}$	**2p**

Enunț subiect 3:

Se consideră şirul de numere reale $u_n=n+\frac{1}{2n-1}, n\in\mathbb{N}^*$.

2p **a)** Arătaţi că $\left|u_n-n+\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right|<1$, pentru $(\forall)n\geq1$.

2p **b)** Stabiliţi monotonia şirului $(u_n)_{n\geq1}$.

3p **c)** Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $u_n\geq1000$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\left|u_n-n+\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right|=1-\frac{1}{2n-1}$	**1p**
$n\geq1\Rightarrow\frac{1}{2n-1}>0\Rightarrow1-\frac{1}{2n-1}<1$	**1p**
b) $u_{n+1}-u_n=n+1+\frac{1}{2(n+1)-1}-\left(n+\frac{1}{2n-1}\right)=$	**1p**
$=1+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}=\frac{(2n+1)(2n-1)+2n-1-(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{4n^2-3}{4n^2-1}, n\geq1$	
Pentru $n\geq1$ avem $4n^2-3\geq0$ şi $4n^2-1\geq0$, deci $u_{n+1}-u_n\geq0$, adică $(u_n)_{n\geq1}$ este crescător	**1p**
c) Observăm că $u_{1000}=1000+\frac{1}{1999}>1000$	**1p**
De asemenea, $u_{999}=999+\frac{1}{1997}<1000$, deoarece $\frac{1}{1997}<1$	**1p**
Deoarece şirul $(u_n)_{n\geq1}$ este crescător, rezultă că n=1000 este cel mai mic număr natural pentru care $u_n\geq1000$	**1p**

Enunț subiect 4:

Dacă $n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$ pentru $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea următoare:

7p $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<\frac{5n-2}{2n}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Verificarea: $\frac{1}{1!}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow1<\frac{3}{2}$ Adevărat	**1p**
Scrierea inegalităților pentru k și $k+1$	**1p**
Demonstrarea inegalității $\frac{5k-2}{2k}+\frac{1}{(k+1)!}<\frac{5k+3}{2(k+1)}\Leftrightarrow\frac{1}{(k+1)!}<\frac{1}{k(k+1)}\Leftrightarrow k(k+1)<1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k\cdot(k+1)$ adevărat pentru $(\forall)k\geq1$	**4p**
Finalizare	**1p**