MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H1 – Filiera tehnologică – toate profilurile

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Se consideră numerele complexe $z_1 = (a+b)+(a-b)i$ și $z_2 = (a-b)+(a+b)i$, cu $a,b \in \mathbb{R}$.

3p **a)** Arătaţi că $iz_1z_2 = -\left|z_1\overline{z_2}\right|$.

4p **b)** Determinaţi numerele $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = i$.

Subiectul 2

3p **a)** Arătați că $\left(1+\sqrt{2}\right)^4 > 17 + 12\sqrt[3]{2}$.

4p **b)** Se consideră numărul real $A = \frac{1}{3}\left[(1+\sqrt{2})^{200} + (3+\sqrt{8})^{100} + (17+\sqrt{288})^{50}\right]$. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $A = (1+\sqrt{2})^n$.

Subiectul 3

7p Se consideră numerele reale $a = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\right)$, $b = \log_3 5$, $c = \log_9 28$, $d = \log_{27} 120$ și $N = 3d + b - a - c$. Arătați că $N \in (2;3)$.

Subiectul 4

În anul 2015, în urma unui recensământ, s-a constatat că într-un oraș erau 90000 de elevi. Numărul acestora scade în fiecare an cu 5%.

3p **a)** Arătați că, în anul 2018, numărul elevilor din oraș a scăzut sub 80000.

2p **b)** Determinați o formulă pentru a exprima numărul de elevi din oraș în funcție de numărul de ani care au trecut începând cu 2015.

2p **c)** După câți ani numărul elevilor din oraș va scădea sub jumătate din numărul elevilor de la momentul recensământului? Utilizați, eventual, faptul că $\lg 95 \simeq 1,98$ și $\lg 5 \simeq 0,7$.