CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a X-a
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=a+b\sqrt{2}, a,b\in\mathbb{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$.

2p **a)** Arătați că $x\in A$, unde $x=3+2\sqrt{2}$.

3p **b)** Arătați că $(\forall)x,y\in A\Rightarrow x\cdot y\in A$.

2p **c)** Demonstrați că A conține o infinitate de elemente distincte.

Subiectul 2

Pentru a măsura magnitudinea unui cutremur, Charles Richter a conceput formula $\lg E=11{,}8+1{,}5M$, unde E reprezintă cantitatea de energie eliberată în momentul producerii cutremurului, iar M este magnitudinea acestuia.

3p **a)** Ce magnitudine ar trebui să aibă un cutremur dacă în timpul producerii lui s-ar elibera o cantitate de energie de 10^{19}?

4p **b)** Arătați că, dacă se mărește magnitudinea cutremurului cu o unitate, cantitatea de energie eliberată crește de cel puțin 31 de ori.

Subiectul 3

Fie ε una dintre soluțiile ecuației $x^2+x+1=0$.

3p **a)** Demonstraţi că ε este soluţie şi a ecuaţiei $x^4+x^2+1=0$.

4p **b)** Arătați că $a=\dfrac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}+\dfrac{\varepsilon^5+\varepsilon^{10}}{(\varepsilon^2+\varepsilon)^2}-\dfrac{\varepsilon^{2025}-1}{\varepsilon^2}$ este un număr real.

Subiectul 4

Fie funcția $f:[1,3]\to[2,6], f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Determinați perechile de numere (a,b) astfel încât funcția f să fie bijectivă.

3p **b)** Pentru $a=2$ și $b=0$ determinați inversa funcției bijective $g:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $g(x)=\dfrac{f(x)+3}{f(x)-1}$.