CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a XI-a
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 2a^2-2a & 4a & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

3p **a)** Calculați $\det\left[\left(A(2025)\right)^{2025}\right]$.

4p **b)** Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 8$ pentru care are loc egalitatea

$$A\left(\lg\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\right)\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\right)\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\lg\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)=A\left(\lg\left(\frac{5}{5n-36}\right)\right).$$

Subiectul 2

Se consideră în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ matricele $A=\begin{pmatrix} 5 & 5+\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $B=A-\sqrt{5}\cdot I_2$ și $C=A-I_2$.

3p **a)** Calculați A^{2025}.

2p **b)** Calculați $\det\left(C^{-1}\right)$

2p **c)** Arătați că ecuația $X^{2n}=B$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, nu are soluții în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$.

Subiectul 3

7p Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2025^{\frac{1}{x}}-2025}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

Subiectul 4

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^{ax+1}+1, & x\in(-\infty;-1] \\ 3+ax, & x\in(-1;+\infty) \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$.

4p **a)** Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care funcția are limită în fiecare punct din domeniu său de definiție.

3p **b)** Demonstrați că, pentru $a=1$, ecuația $f(x)+f(-x)-7=0$ are o soluție în intervalul $(-\infty,-1)$.