MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI” – ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H1 – Filiera tehnologică – toate profilurile

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Fie funcţiile $f,F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+x-1)\ln x$ şi

$F(x)=x\left(\frac{x^3}{4}+ax-b\right)\ln x-x\left(cx^3+dx-1\right)$.

4p **a)** Determinaţi $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât F să fie o primitivă a lui f pe intervalul $(0,+\infty)$.

3p **b)** Determinaţi $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f astfel încât $G(e)=\frac{e^4}{16}$.

Subiectul 2

Se consideră funcția continuă $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-4}, x\in[0,1)\\ -\frac{1}{3\sqrt{x}}, x\in[1,2]\end{cases}$.

3p **a)** Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

4p **b)** Determinați $k\in(0,\infty)$ astfel încât $\int_0^{\frac{k}{k+1}} f\left(\sqrt{x}\right)dx=\ln\frac{7}{8}$.

Subiectul 3

7p Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-2x-2y+6$, $(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$.
Determinați cardinalul mulțimii $S=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x \text{ simetrizabil în raport cu legea „}\circ\text{”}\}$.

Subiectul 4

Se consideră mulțimea $M=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|2x-1|\le 5\}$ și operația algebrică $x*y=\max\{x,y\}$, $(\forall)x,y\in M$.

2p **a)** Dacă a este cel mai mic element al mulțimii M și b este cel mai mare element al acesteia, calculați $a*b$.

3p **b)** Determinați mulțimea $M_1\cap M_2$, unde $M_1=\{x\in M\,|\,2*x=x\}$ și $M_2=\{x\in M\,|\,x*2=2\}$.

2p **c)** Determinați perechile de numere (x,y), cu $x,y\in M$ care verifică sistemul $\begin{cases}x*0=y\\ y*0=x\end{cases}$.