CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoeretică, profil real, specializarea științele naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Fie mulțimea $G=\left[\frac{k^2+1}{k},+\infty\right)$, cu $k\in(1,+\infty)$ și operația asociativă $x*y=kxy-k^2(x+y)+k^3+k$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

3p **a)** Arătați că mulțimea G este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu operația dată.

4p **b)** Determinați numerele $x,k\in\mathbb{N}$, $x\geq 2$ și $k\geq 2$, știind că $\underbrace{x*x*..........*x}_{2025}=\frac{13^{2025}}{k}+k$.

Subiectul 2

Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x)\,\middle|\,A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

4p **a)** Demonstrați că $(G,\cdot)$ este grup .

3p **b)** Știind că $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},\circ\right)$ este un grup, unde $x\circ y=2xy-x-y+1,(\forall)x,y\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, arătați că acesta este izomorf cu grupul $(G,\cdot)$.

Subiectul 3

Se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{e^{2x}+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

3p **a)** Determinați primitiva funcției f_0 al cărei grafic conține punctul $A\left(0,\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2p **b)** Calculați $\int f_3(x)dx$.

2p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției f_1 are un singur punct de inflexiune.

Subiectul 4

7p Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_1^t\left(x+\frac{4}{x}-5\right)dx$. Determinați valoarea minimă a funcției f .