CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025 -

CLASA a IX-a
SECȚIUNEA H2 – Filiera teoretică, profil real, specializarea științele naturii

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Fie $\triangle ABC$ şi M mijlocul segmentului AC, N simetricul punctului C față de B şi P un punct care verifică relaţia $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$

4p **a)** Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.

3p **b)** Dacă Q este punctul de intersecţie al dreptelor CP şi AN, determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{QM}=a\overrightarrow{CN}$.

Subiectul 2

3p **a)** Arătați că, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, are loc egalitatea $\left\{\frac{3x+7}{x+2}\right\}=\frac{1}{x+2}$.

4p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{3x+4}{x+1}\right]+\left\{\frac{3x+7}{x+2}\right\}=3,(27)$.

Subiectul 3

Se consideră şirul de numere reale $u_n=n+\frac{1}{2n-1}, n\in\mathbb{N}^*$.

2p **a)** Arătaţi că $\left|u_n-n+\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right|<1$, pentru $(\forall)n\geq 1$.

2p **b)** Stabiliţi monotonia şirului $(u_n)_{n\geq 1}$.

3p **c)** Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $u_n\geq 1000$.

Subiectul 4

7p Dacă $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ pentru $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea următoare:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\frac{5n-2}{2n},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$